Exponentielle

Propriété et définition

Il existe une unique fonction *f* dérivable sur ℝ telle que $f'=f$ et $f(0)=1$. Cette fonction s'appelle fonction exponentielle et se note exp.

Conséquence

$\exp(0)=1$

Propriété :

La fonction exponentielle est strictement positive sur ℝ.

Propriétés algébriques

Relation fonctionnelle

Pour tous réels *x* et *y*, on a : $\exp(x+y)=\exp x \exp y$

Corollaires

Pour tous réels *x* et *y*, on a :

a) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$ ou encore $\exp x \exp(-x)=1$

b) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp x}{\exp y}$

c) $\exp(nx)=(\exp x)^n$ avec $n \in N$

Nombre e

Définition
L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée *e*.
On a ainsi $\exp 1 = e$
Notation nouvelle
$\exp x = \exp(x \times 1) = (\exp 1)^x = e^x$

On note pour tout *x* réel, $\exp x = e^x$

Comme π, le nombre *e* est un nombre irrationnel, c'est à dire qu'il s'écrit avec un nombre infini de décimales sans suite logique.
Ses premières décimales sont :
e ≈ 2,7182818284

Propriétés
Pour tous réels *x* et *y*, on a :
a) $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
b) $e^x > 0$ et $(e^x)' = e^x$
c) $e^{x+y} = e^x e^y$ $\quad e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ $\quad e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ $\quad (e^x)^n = e^{nx}$, avec $n \in N$.

Méthode : Dériver une fonction exponentielle
Dériver les fonctions suivantes :
$f(x) = 4x - 3e^x$

$f'(x) = 4 - 3e^x$

Méthode : Simplifier les écritures
Simplifier l'écriture des nombres suivants :
$A = \dfrac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$ $\qquad B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$

$A = \dfrac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$ $\qquad B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$

$A = \dfrac{e^{7-4}}{e^{-5}}$ $\qquad B = e^{5 \times (-6)} \times e^{-3}$

$A = \dfrac{e^3}{e^{-5}}$ $\qquad B = e^{-30} \times e^{-3}$

$A = e^{3-(-5)}$ $\qquad B = e^{-30-3}$

$A = e^8$ $\qquad B = e^{-33}$

Propriétés
Pour tous réels *a* et *b*, on a :
a) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
b) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

a) Résoudre dans ℝ l'équation $e^{x^2-3}-e^{-2x}=0$.
b) Résoudre dans ℝ l'inéquation $e^{4x-1}\geq 1$.

a) $e^{x^2-3}-e^{-2x}=0$

$e^{x^2-3}=e^{-2x}$

$x^2-3=-2x$

$x^2+2x-3=0$

$\Delta=2^2-4\times 1\times(-3)=16$

Donc x = $\frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1}$ = -3 ou x = $\frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1}$ = 1

Les solutions sont –3 et 1.

b) $e^{4x-1}\geq 1$

$e^{4x-1}\geq e^0$

$4x-1\geq 0$

$x\geq \frac{1}{4}$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$.

Exponentielle et suite géométrique

Propriété

La suite $\left(e^{na}\right)$ est une suite géométrique de raison e^a.

Méthode: Déterminer une suite géométrique comprenant une exponentielle

Dans chaque cas, déterminer la raison et le premier terme de la suite géométrique dont le terme général est :

a) $u_n = e^{4n}$ b) $u_n = 2e^{-3n}$

a) $u_n = e^{4n} = 1\left(e^4\right)^n$

$\left(u_n\right)$ est une suite géométrique de raison e^4 et de premier terme 1.

b) $u_n = 2e^{-3n} = 2\left(e^{-3}\right)^n$

$\left(u_n\right)$ est une suite géométrique de raison e^{-3} et de premier terme 2.

Propriétés analytiques

Dérivabilité
La fonction exponentielle est dérivable sur IR et $(\exp x)' = \exp x$

Variations
La fonction exponentielle est strictement croissante sur IR.

Méthode : Étudier une fonction exponentielle
Soit *f* la fonction définie sur IR par $f(x)=(x+1)e^x$.
a) Calculer la dérivée de la fonction *f*.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction *f*.
c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

a) $f'(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$
b) Comme $e^x>0$, $f'(x)$ est du signe de $x+2$.
f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-2]$ et croissante sur l'intervalle $[-2;+\infty[$.
On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	$-e^{-2}$	↗	

c) $f(0)=1$ et $f'(0)=2$
Une équation de la tangente à la courbe en 0 est donc : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$, soit :
$y=2x+1$

Fonctions de la forme $t \to e^{kt}$
La fonction $t \to e^{kt}$, avec $k \in Z \setminus \{0\}$, est dérivable sur IR. Sa dérivée est la fonction $t \to ke^{kt}$.

Exemple :
Soit $f(t)=e^{-4t}$ alors $f'(t)=-4e^{-4t}$.

Propriété
Si *k* > 0 : la fonction $t \to e^{kt}$ est croissante.
Si *k* < 0 : la fonction $t \to e^{kt}$ est décroissante.

Méthode: Étudier une fonction $t \to e^{kt}$ dans une situation concrète
Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction *f* définie sur [0 ; 10] et telle que $f'(t)=0{,}14f(t)$.

1) Montrer que la fonction *f* définie sur [0 ; 10] par $f(t)=Ae^{0{,}14t}$ convient.
2) On suppose que $f(0)=50000$. Déterminer *A*.

3) Déterminer les variations de *f* sur [0 ; 10].
4) a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
b) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé. Arrondir à l'heure près.

1) $f'(t)=A\times 0{,}14e^{0{,}14t}=0{,}14\times Ae^{0{,}14t}=0{,}14f(t)$.
La fonction *f* définie sur [0 ; 10] par $f(t)=Ae^{0{,}14t}$ vérifie bien l'égalité $f'(t)=0{,}14f(t)$ donc elle convient.
2) $f(0)=Ae^{0{,}14\times 0}=Ae^{0}=A$.
Donc, si $f(0)=50000$, on a: $A=50000$.
Une expression de la fonction *f* est donc: $f(t)=50000e^{0{,}14t}$.
3) Comme $k=0{,}14>0$, on en déduit que la fonction $t\to e^{0{,}14t}$ est strictement croissante sur [0 ; 10]. Il en est de même pour la fonction *f*.
4) a) $f(3)=50000e^{0{,}14\times 3}=50000e^{0{,}42}\approx 76000$
$f(5{,}5)=50000e^{0{,}14\times 5{,}5}=50000e^{0{,}77}\approx 108000$
Après 3h, l'organisme contient environ 76 000 bactéries.
Après 5h30, l'organisme contient environ 108 000 bactéries.
b) Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100 000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.

Courbe représentative

Tableau de variations

On dresse le tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	$+\infty$
$(\exp x)'$	+	
$\exp x$	0 ↗	$+\infty$

Courbe représentative