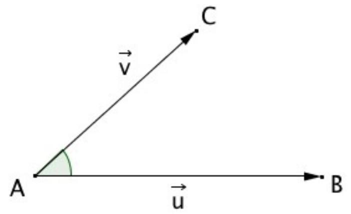
Produit scalaire

Norme d'un vecteur
Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.
La **norme du vecteur** $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.



Définition du produit scalaire
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel défini par :
$\vec{u}.\vec{v}=0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
$\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$, dans le cas contraire.
$\vec{u}.\vec{v}$se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".

Remarque
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :
$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\widehat{BAC}$

Exemple
Soit un triangle équilatéral ABC de côté *a*.
Calculer, en fonction de *a*, le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\widehat{BAC}$
= $a\times a\times\cos 60°$
= $a^2\times 0{,}5$
= $\dfrac{a^2}{2}$

Propriété
Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

Opérations sur les produits scalaires
Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :
1) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$
2) $\vec{u}.(k\vec{v})=k\vec{u}.\vec{v}$, avec *k* un nombre réel.

Identités remarquables
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :
1) $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$
2) $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$

3) $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

Propriétés du produit scalaire

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

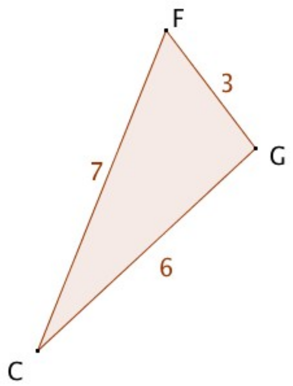
$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ et $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

Propriété

Soit A, B et C trois points du plan. On a :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

Exercice

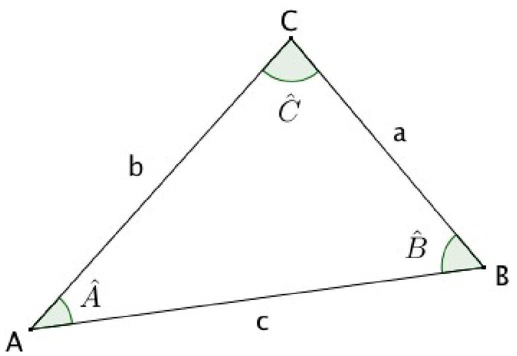


On considère la figure ci-contre, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}$.

$\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\left(CG^2+CF^2-GF^2\right)$

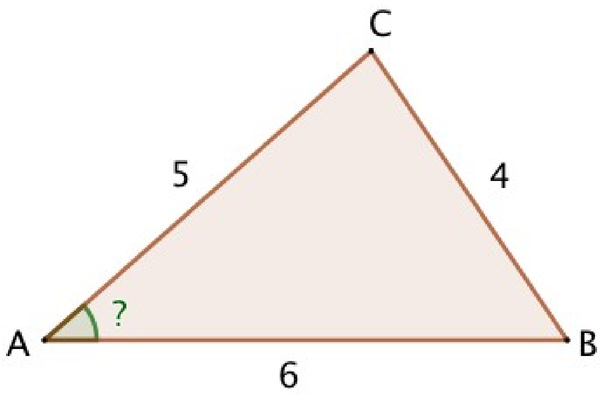
$= \frac{1}{2}\left(6^2+7^2-3^2\right)$

= 38



Théorème d'Al Kashi
Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\widehat{A}$

Exercice
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.

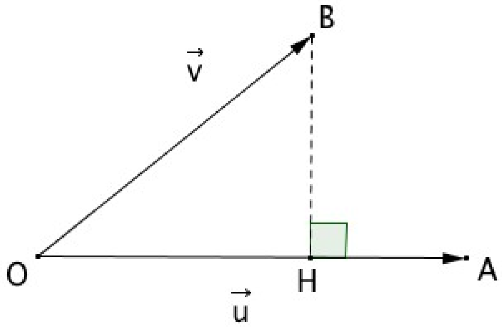


D'après le théorème d'Al Kashi, on a:
$CB^2=AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$
$4^2=6^2+5^2-2\times 6\times 5\times\cos\widehat{BAC}$
$16=36+25-60\cos\widehat{BAC}$
$60\cos\widehat{BAC}=36+25-16$
$60\cos\widehat{BAC}=45$
$\cos\widehat{BAC}=\frac{45}{60}$
$\cos\widehat{BAC}=\frac{3}{4}$
$\widehat{BAC}\approx 41°$

Propriété
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$.

Projection orthogonale
Soit une droite *d* et un point M du plan.
Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.

Propriété
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.
H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).
On a : $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$



Exercice
Soit un carré ABCD de côté *c*.
Calculer, en fonction de *c*, les produits scalaires:
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$

a) Par projection, on a:
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\|\overrightarrow{AB}\|^2=c^2$
b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$ car les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.
c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DA}=-\|\overrightarrow{AD}\|^2=-c^2$

Propriété
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x;y)$ et $(x';y')$.
On a : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$.

Exercice
Soit $\vec{u}(5;-4)$ et $\vec{v}(-3;7)$ deux vecteurs. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$

$\vec{u}.\vec{v}=5\times(-3)+(-4)\times7=-15-28=-43$

Ensembles de points

Propriété

Etant donné deux points A et B et leur milieu I, on a

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ = MI^2 - $\frac{1}{4}$ AB^2

Exercice

Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=2$ où A et B sont tels que AB = 8

Propriété

L'ensemble des points M vérifiant l'égalité $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre [AB].

Propriété

Un point M, distinct de A et B, appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.