Suites

Exemple d'introduction

On considère une liste de nombres formée par tous les nombres pairs rangés dans l'ordre croissant : 0, 2, 4, 6, …
On note (u_n) l'ensemble des éléments de cette suite de nombres tel que :
$u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, $u_3 = 6$, …
On a ainsi défini une suite numérique.
On peut lui associer une fonction définie sur N par $u : N \to R$
$n \to u(n) = u_n$

Définition

Une **suite numérique** (u_n) est une liste ordonnée de nombres réels telle qu'à tout entier n on associe un nombre réel noté u_n.
u_n est appelé le **terme de rang *n*** de cette suite (ou d'indice n).

Exemples:

- Pour tout n de N, on donne : $u_n = 2n+1$ qui définit la suite des nombres impairs.
Les premiers termes de cette suite sont donc :
$u_0 = 2 \times 0 + 1 = 1$,
$u_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$,
$u_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$,
$u_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$.
- Pour tout n de N, on donne : $v_n = 3n^2 - 4$
Les premiers termes de cette suite sont donc :
$v_0 = 3 \times 0^2 - 4 = -4$,
$v_1 = 3 \times 1^2 - 4 = -1$,
$v_2 = 3 \times 2^2 - 4 = 8$,
$v_3 = 3 \times 3^2 - 4 = 23$.

Générer une suite numérique par une formule explicite

Lorsqu'on génère une suite par une formule explicite, chaque terme de la suite est exprimé en fonction de n et indépendamment des termes précédents.

Exemples

- On définit la suite (u_n) par :
$u_0 = 7$ et chaque terme de la suite est le triple de son précédent.
Les premiers termes de cette suite sont donc :
$u_0 = 7$,
$u_1 = 3 \times u_0 = 3 \times 7 = 21$,
$u_2 = 3 \times u_1 = 3 \times 21 = 63$.
De façon générale, on peut noter: $u_{n+1} = 3u_n$
- On définit la suite (v_n) par :
$v_0 = 2$ et pour tout n de N, $v_{n+1} = 5v_n - 6$
Les premiers termes de cette suite sont donc :
$v_0 = 2$,
$v_1 = 5v_0 - 6 = 5 \times 2 - 6 = 4$,
$v_2 = 5v_1 - 6 = 5 \times 4 - 6 = 14$,

$v_3 = 5v_2 - 6$ = 5 x 14 – 6 = 64
Contrairement à une suite définie par une formule explicite, il n'est pas possible, dans l'état, de calculer par exemple v_{12} sans connaître v_{11}
- On définit la suite (w_n) par :
Pour tout n de $N \setminus \{0\}$, $w_n = 1+2+3+\ldots+n$
Les premiers termes de cette suite sont donc :
w_1 = 1,
w_2 = 1 + 2 = 3,
w_3 = 1 + 2 + 3 = 6,
w_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10.
On remarque par ailleurs que: $w_{n+1} = w_n + n + 1$
$w_2 = w_1 + 2$ = 1 + 2 = 3,
$w_3 = w_2 + 3$ = 3 + 3 = 6,
$w_4 = w_3 + 4$ = 6 + 4 = 10.

Générer une suite numérique par une relation de récurrence
Lorsqu'on génère une suite par une relation de récurrence, chaque terme de la suite s'obtient à partir d'un (ou plusieurs) des termes précédents.

Représentation graphique d'une suite
Dans un repère du plan, on représente une suite par un nuage de points de coordonnées $(n ; u_n)$.

Exemple :
Pour tout n de ℕ, on donne : $u_n = \frac{n^2}{2} - 5$
On construit le tableau de valeurs avec les premiers termes de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	-5	-4,5	-3	-0,5	3	7,5	13	19,5	27

Il est possible d'obtenir un nuage de points à l'aide d'un logiciel.

Suites arithmétiques

Exemple :
Considérons une suite numérique (u_n) où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.
Si le premier terme est égal à 4, les premiers termes successifs sont :
$u_0 = 4$, $u_1 = 9$, $u_2 = 14$, $u_3 = 19$.
Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 4.
La suite est donc définie par : $u_{n+1}=u_n+5$ et $u_0=4$

Définition :
Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1}=u_n+r$.
Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Méthode : Démontrer si une suite est arithmétique
La suite (u_n) définie par : $u_n=9-8n$ est-elle arithmétique ?

$u_{n+1}-u_n=9-8(n+1)-9+8n=9-8n-8-9+8n=-8$
La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à –8.
(u_n) est une suite arithmétique de raison –8.

Propriété :
(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n=u_0+nr$

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique
Considérons la suite arithmétique (u_n) telle que $u_5=9$ et $u_{10}=24$
1) Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).
2) Exprimer u_n en fonction de n.

1) Les termes de la suite sont de la forme $u_n=u_0+nr$
Ainsi $u_5=u_0+5r=9$ et
$u_{10}=u_0+10r=24$.
En soustrayant membre à membre, on obtient : $u_0+5r-u_0-10r=9-24$
Soit : $5r-10r=9-24$ donc $r=3$.
Comme $u_0+5r=9$, on a : $u_0+5\times 3=9$ et donc : $u_0=-6$
2) $u_n=u_0+nr$ soit $u_n=-6+n\times 3$ ou encore $u_n=3n-6$

Propriété :
Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Suites géométriques

Exemple :
Considérons une suite numérique (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 3.
Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :
$u_0 = 5$, $u_1 = 15$, $u_2 = 45$, $u_3 = 135$.
Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 5.
La suite est donc définie par : $u_{n+1}=3u_n$ et $u_0=5$.

Définition :
Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1}=q\times u_n$.
Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Méthode : Démontrer si une suite est géométrique
La suite (u_n) définie par : $u_n=6\times 4^n$ est-elle géométrique ?

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{6\times 4^{n+1}}{6\times 4^n}=\frac{4^{n+1}}{4^n}=4^{n+1-n}=4$$

Le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 4.
(u_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $u_0=6\times 4^0=6$

Exemple concret :
On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 3%.
Chaque année, le capital est multiplié par 1,03.
Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,03.
On a ainsi:
$u_1=1{,}03\times 500=515$ $\qquad$ $u_2=1{,}03\times 515=530{,}45$
$u_3=1{,}03\times 530{,}45=546{,}36$
De manière générale: $u_{n+1}=1{,}03\times u_n$ avec $u_0=500$
On peut également exprimer u_n en fonction de n: $u_n=500\times 1{,}03^n$

Propriété :
(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n=u_0\times q^n$.

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique
Considérons la suite géométrique (u_n) telle que $u_6=4$ et $u_{12}=256$
Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).

Les termes de la suite sont de la forme $u_n=u_0\times q^n$.
Donc: $u_6=u_0\times q^6=4$ et $u_{12}=u_0\times q^{12}=256$
Ainsi : $\frac{u_{12}}{u_6}$ = $\frac{u_0\times q^{12}}{u_0\times q^6}$ = q^6 et $\frac{u_{12}}{u_6}$ = $\frac{256}{4}$ = 64 donc $q^6=64$
Ainsi $q=\sqrt[6]{64}=2$

Comme $u_0 \times q^6 = 4$, on a : $u_0 \times 2^6 = 4$ et donc : $u_0 = \frac{1}{16}$

Sommes de termes consécutifs

Cas d'une suite arithmétique

n est un entier naturel non nul alors on a : $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Remarque : Il s'agit de la somme des *n* premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1.

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique
Calculer la somme suivante
$S_1=1+2+3+\ldots+123$

$S_1=1+2+3+\ldots+123$
$S_1=\frac{123\times 124}{2}$
$S_1=7626$

Cas d'une suite géométrique

n est un entier naturel non nul et *q* un réel différent de 1 alors on a :
$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Remarque : Il s'agit de la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison *q* et de premier terme 1.

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite géométrique
Calculer la somme suivante :
$S=1+3+3^2+3^3+\ldots+3^{11}$

$S=1+3+3^2+3^3+\ldots+3^{11}$
S = $\frac{1-3^{12}}{1-3}$
S = 265720

Sens de variation d'une suite numérique

Définitions :
Soit un entier *p* et une suite numérique (u_n).
- La suite (u_n) est **croissante à partir du rang *p*** signifie que pour $n \geq p$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite (u_n) est **décroissante à partir du rang *p*** signifie que pour $n \geq p$, on a $u_{n+1} \leq u_n$.

Méthode : Étudier les variations d'une suite
Pour tout *n* de N, on donne la suite (u_n) définie par : $u_n = n^2 - 4n + 3$
Démontrer que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

On commence par calculer la différence $u_{n+1} - u_n$:
$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 4(n+1) + 3 - (n^2 - 4n + 3)$ = $n^2 + 2n + 1 - 4n - 4 + 3 - n^2 + 4n - 3$ = $2n - 3$
On étudie ensuite le signe de $u_{n+1} - u_n$:
$u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour $2n - 3 \geq 0$ donc pour $n \geq 1{,}5$.
Ainsi pour $n \geq 2$ (*n* est entier), on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
On en déduit qu'à partir du rang 2, la suite (u_n) est croissante.

Propriété :
Soit une fonction *f* définie sur $[0 ; +\infty[$ et une suite numérique (u_n) définie sur N par $u_n = f(n)$. Soit un entier *p*.
- Si *f* est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang *p*.
- Si *f* est décroissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang *p*.

Méthode : Étudier les variations d'une suite à l'aide de la fonction associée
Pour tout *n* de N^*, on donne la suite (u_n) définie par : u_n = $\frac{1}{n}$
Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

On considère la fonction associée *f* définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x)$ = $\frac{1}{x}$
Ainsi $u_n = f(n)$.
f est décroissante sur $[0 ; +\infty[$. On en déduit que (u_n) est décroissante.

Remarque :
La réciproque de la propriété énoncée plus haut est fausse.

Variations d'une suite arithmétique
(u_n) est une suite arithmétique de raison *r.*
- Si *r* > 0 alors la suite (u_n) est croissante.
- Si *r* < 0 alors la suite (u_n) est décroissante.

Exemple :
La suite arithmétique (u_n) définie par
$u_n = 12 - 11n$ est décroissante car de raison
négative et égale à –11.

Variations d'une suite géométrique
(u_n) est une suite géométrique de raison *q* et de premier terme non nul u_0.
Pour $u_0 > 0$:
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
Pour $u_0 < 0$:
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est croissante.

Exemple :
La suite géométrique (u_n) définie par $u_n = -8 \times 9^n$ est décroissante car le premier terme est négatif et la raison est supérieure à 1.

Remarque :
Si la raison *q* est négative alors la suite géométrique n'est pas monotone.

Notion de limite d'une suite

Exemple : Suite convergente

Pour tout *n* de $N \setminus \{0\}$, on considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{3n+2}{n}$

On construit le tableau de valeurs avec des termes de la suite :

n	1	2	3	4	5	10	20	50	500
u_n	5	4	3,666	3,5	3,4	3,2	3,1	3,04	3,004

Plus *n* devient grand, plus les termes de la suite semblent se rapprocher de 3.
On dit que la suite (u_n) converge vers 3 et on note : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 3$

Exemple : Suite divergente

- Pour tout *n* de N, on considère la suite (u_n) définie par : $u_n = n^2 + 3$

Calculons quelques termes de cette suite :
$u_0 = 0^2 + 3 = 3$,
$u_1 = 1^2 + 3 = 4$,
$u_2 = 2^2 + 3 = 7$,
$u_{10} = 10^2 + 3 = 103$,
$u_{100} = 100^2 + 3 = 10003$.
Plus *n* devient grand, plus les termes de la suite semblent devenir grand.
On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ et on note : $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

- Pour tout *n* de N, on considère la suite (v_n) définie par : $v_{n+1} = (-1)^n v_n$ et $v_0 = 3$

Calculons les premiers termes de cette suite :
$v_1 = (-1)^0 v_0 = 3$
$v_2 = (-1)^1 v_1 = -3$
$v_3 = (-1)^2 v_2 = 3$
$v_4 = (-1)^3 v_3 = -3$
$v_5 = (-1)^4 v_4 = 3$
Lorsque *n* devient grand, les termes de la suite ne semblent pas se rapprocher vers une valeur unique. On dit que la suite (u_n) diverge.