

Cercle trigonométrique

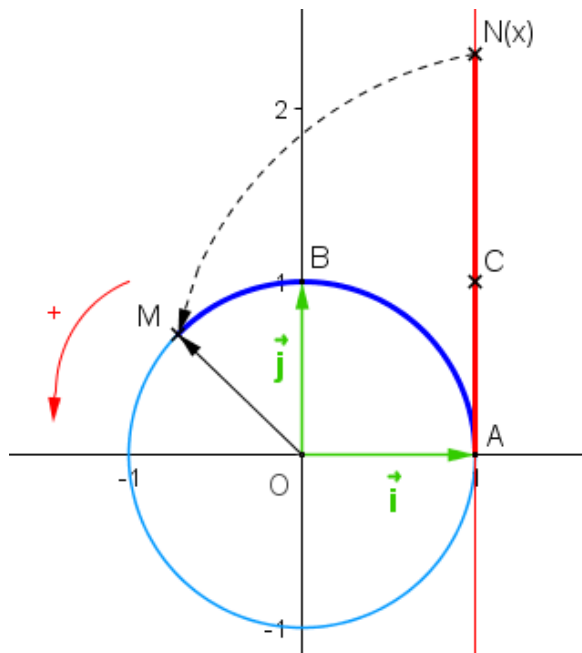
Définition

Sur un cercle, on appelle sens direct, **sens positif** ou **sens trigonométrique** le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Définition

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et orienté dans le sens direct, le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre O et de rayon 1.

Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique



Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $(A; \vec{j})$ soit un repère de la droite.

Si l'on «enroule» la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.

La longueur de l'arc $\widehat{AM}$ est ainsi égale à la longueur AN.

La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π

En effet, son rayon est 1 donc $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$

Ainsi, à un tour complet sur le cercle, on peut faire correspondre le nombre réel 2π

On définit alors une nouvelle unité d'angle: le radian, tel qu'un tour complet mesure 360° ou 2π radians.

Définition

On appelle **radian**, noté *rad*, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.

Correspondance degrés et radians

Ainsi, à 2π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 360° .

Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes:

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Plusieurs enroulements de la droite

A plusieurs points de la droite orientée on peut faire correspondre un même point du cercle. La droite orientée peut en effet s'enrouler plusieurs fois autour du cercle dans un sens et dans l'autre.

On a vu qu'un angle possède plusieurs mesures.

Si θ est une mesure de l'angle $(\vec{i}; \vec{OM})$ alors tout angle de la forme $\theta + k \times 2\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, est une mesure de l'angle $(\vec{i}; \vec{OM})$.

On dit que l'angle $(\vec{i}; \vec{OM})$ est égal à θ **modulo** 2π .

Définition

La **mesure principale d'un angle orienté** est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

Exemple

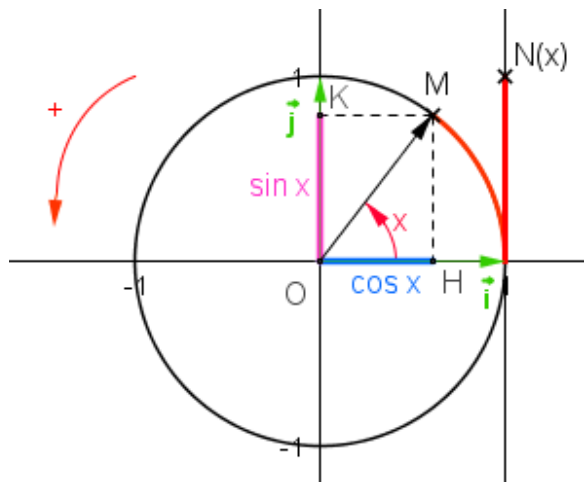
Une mesure d'un angle orienté est $\frac{7\pi}{4}$.

D'autres mesures sont : $\frac{7\pi}{4} - 2\pi$; $\frac{7\pi}{4} - 4\pi$; $\frac{7\pi}{4} - 6\pi$; ... soit : $\frac{-\pi}{4}$; $\frac{-9\pi}{4}$; $\frac{-17\pi}{4}$; ...

$\frac{-\pi}{4}$ est la mesure principale de cet angle orienté car c'est la seule comprise entre $-\pi$ exclu et π

Cosinus et sinus d'un angle

Coordonnées d'un point du cercle trigonométrique



Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O.

Pour tout nombre réel x , considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x .

À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique.

On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M.

Définitions

Le **cosinus** du nombre réel x est l'abscisse de M et on note **cos** x .

Le **sinus** du nombre réel x est l'ordonnée de M et on note **sin** x .

Propriétés

1) $-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$

2) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

3) $\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$

4) $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif

5) $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif

Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Cosinus et sinus d'angles associés

Pour tout nombre réel x , on a:

$$1) \cos(\pi + x) = -\cos x \quad \text{et} \quad \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$2) \cos(\pi - x) = -\cos x \quad \text{et} \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$

$$3) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$4) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$a) \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad b) \sin x = -\frac{1}{2}$$

a) L'équation $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pour solution:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

où k est un entier relatif.

b) L'équation $\sin x = -\frac{1}{2}$ a pour solution:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \\ x_2 = \frac{-5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

où k est un entier relatif.

Fonctions cosinus et sinus

Périodicité

1) $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif

2) $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π .

Conséquence

Pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus ou de la fonction sinus, il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur 2π et de la compléter par translation.

Parité

1) $\sin(-x) = -\sin x$

2) $\cos(-x) = \cos x$

On dit que la fonction cosinus est paire et que la fonction sinus est impaire.

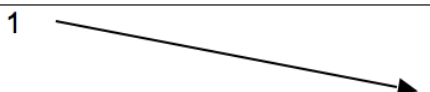
Conséquence

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

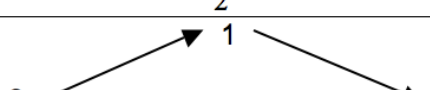
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine.

Variations des fonctions cosinus et sinus

x	0	π
$\cos x$	1	-1

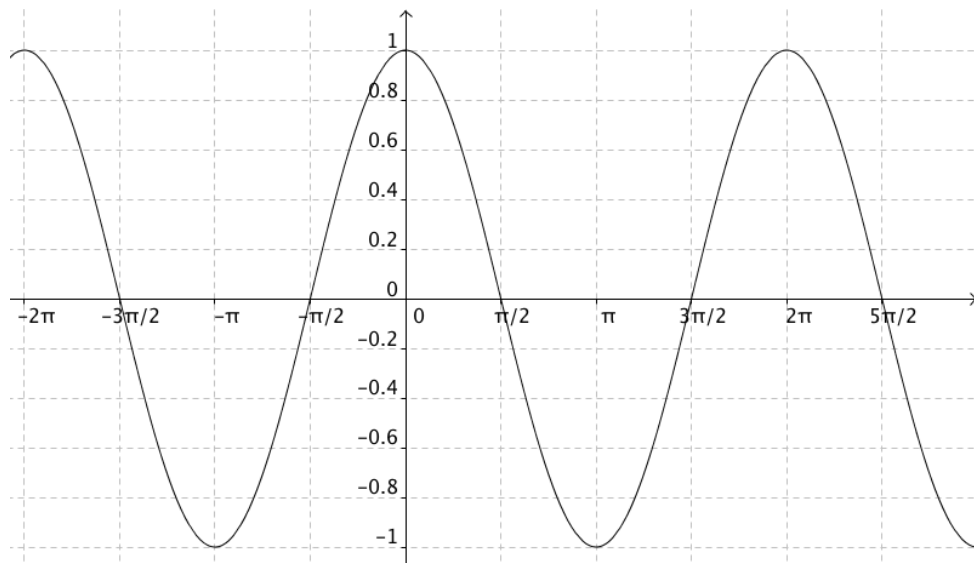


x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	1	0



Représentations graphiques

Fonction cosinus



Fonction sinus

