Variables aléatoires

Exemple

Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat."
L'ensemble de toutes les issues possibles $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ s'appelle l'univers des possibles.
On considère l'événement A : "On obtient un résultat pair."
On a donc : $A = \{2 ; 4 ; 6\}$.
On considère l'événement élémentaire E : "On obtient un 3".
On a donc : $E = \{3\}$.
Dans l'expérience précédente, on considère le jeu suivant :
Si le résultat est pair, on gagne 2€.
Si le résultat est 1, on gagne 3€.
Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4€.
On a défini ainsi une variable aléatoire X sur $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ qui peut prendre les valeurs 2, 3 ou –4.
On a donc : $X(1) = 3$, $X(2) = 2$, $X(3) = -4$, $X(4) = 2$, $X(5) = -4$, $X(6) = 2$

Définition

Une **variable aléatoire** X est une fonction définie sur un univers Ω et à valeur dans $\mathbb{R}$.

Exemple

On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent.
Chaque issue du lancer de dé est équiprobable et égale à $\frac{1}{6}$.
La probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur 2 est égale à $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.
On note : $P(X = 2) = \frac{1}{2}$.
De même : $P(X = 3) = \frac{1}{6}$ et $P(X = -4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.
On peut résumer les résultats dans un tableau :

x_i	-4	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

Ce tableau résume la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Définition

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω et prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
La **loi de probabilité** de X associe à toute valeur x_i la probabilité $P(X = x_i)$.

Remarques

$P(X = x_i)$ peut se noter p_i.
$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$

Espérance et variance

Définitions

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω et prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
La loi de probabilité de X associe à toute valeur x_i la probabilité $p_i = P(X = x_i)$.
L'**espérance mathématique** de la loi de probabilité de X est :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

La **variance** de la loi de probabilité de X est :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \ldots + p_n(x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2$$

L'**écart-type** de la loi de probabilité de X est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Propriétés

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω.
Soit a et b deux nombres réels.
On a : $E(aX+b) = aE(X)+b$ $V(aX+b) = a^2V(X)$

Exercice

Une entreprise qui fabrique des roulements à bille fait une étude sur une gamme de billes produites. Le diamètre théorique doit être égal à 1,3 cm mais cette mesure peut être légèrement erronée.
L'expérience consiste à tirer au hasard une bille d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.
On considère la variable aléatoire *X* qui, à une bille choisie au hasard, associe son diamètre.
La loi de probabilité de *X* est résumée dans le tableau suivant :

x_i	1,298	1,299	1,3	1,301	1,302
$P(X = x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculer l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de *X*.

Pour simplifier les calculs, on définit la variable aléatoire $Y = 1000X - 1300$.
La loi de probabilité de *Y* est alors :

x_i	–2	–1	0	1	2
$P(Y = x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculons l'espérance et la variance de la loi de probabilité de *Y* :
$E(Y) = -2\text{x}0,2 + (-1)\text{x}0,1 + 1\text{x}0,4 + 2\text{x}0,1 = 0,1$
$V(Y) = 0,2\text{x}(-2 - 0,1)^2 + 0,1\text{x}(-1 - 0,1)^2 + 0,2\text{x}(0 - 0,1)^2 + 0,4\text{x}(1 - 0,1)^2$
$+ 0,1\text{x}(2 - 0,1)^2 = 1,69$
On en déduit l'espérance et la variance de la loi de probabilité de *X* :
$E(Y) = E(1000X - 1300) = 1000\,E(X) - 1300$
Donc : $E(X) = \dfrac{E(Y)+1300}{1000} = \dfrac{0,1+1300}{1000} = 1,3001$

$V(Y) = V(1000X - 1300) = 1000^2\ V(X)$

Donc : V(X) = $\frac{V(Y)}{1000^2}$ = $\frac{1,69}{1000^2}$

Et donc : $\sigma(X)$ = $\sqrt{\frac{1,69}{1000^2}}$ = $\frac{1,3}{1000}$ = 0,0013

Conclusion : $E(X)$ = 1,3001 cm et $\sigma(X) = 0,0013$ cm.