

## Variations d'une fonction

### Théorème

Soit une fonction  $f$  définie et dérivable sur un intervalle  $I$ .

Si  $f'(x) \leq 0$ , alors  $f$  est décroissante sur  $I$ .

Si  $f'(x) \geq 0$ , alors  $f$  est croissante sur  $I$ .

**Méthode :** Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré

Soit la fonction  $f$  définie sur  $R$  par  $f(x) = 2x^2 + 16x - 9$

1) Calculer la fonction dérivée de  $f$ .

2) Déterminer le signe de  $f'$  en fonction de  $x$ .

3) Dresser le tableau de variations de  $f$ .

1) Pour tout  $x$  réel, on a :  $f'(x) = 2 \times 2x + 16 = 4x + 16$

2) On commence par résoudre l'équation  $f'(x) = 0$ .

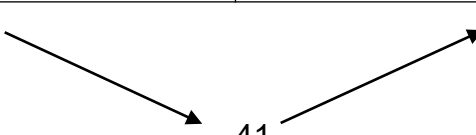
Soit :  $4x + 16 = 0$

Donc  $4x = -16$  et  $x = -4$

La fonction  $f'$  est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 4 est positif.

Elle est donc d'abord négative puis ensuite positive

3) On dresse alors le tableau de variations en appliquant le théorème :

|      |                                                                                     |            |           |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$                                                                           | $-4$       | $+\infty$ |
| $f'$ | $-$                                                                                 | $\bigcirc$ | $+$       |
| $f$  |  |            |           |

En effet :  $f(-4) = 2(-4)^2 + 16 \times (-4) - 9 = -41$

La fonction  $f$  admet un minimum égal à  $-41$  en  $x = -4$

**Méthode :** Dresser le tableau de variations d'une fonction polynôme du 3<sup>e</sup> degré

Soit la fonction  $f$  définie sur  $R$  par  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 8$

Étudier les variations de  $f$  et dresser le tableau de variation.

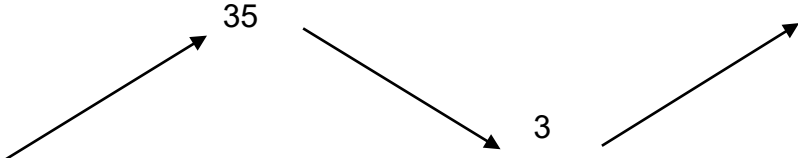
Pour tout  $x$  réel, on a :  $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

Commençons par résoudre l'équation  $f'(x) = 0$  :

Le discriminant du trinôme  $3x^2 + 6x - 9$  est égal à  $\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times (-9) = 144$

L'équation possède deux solutions :  $x_1 = \frac{-6 - \sqrt{144}}{2 \times 3} = -3$  et  $x_2 = \frac{-6 + \sqrt{144}}{2 \times 3} = 1$

On en déduit le tableau de variations de  $f$  :

|         |                                                                                    |            |     |            |     |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|------------|-----|------------|-----|
| $x$     | $-\infty$                                                                          | $-3$       | $1$ | $+\infty$  |     |
| $f'(x)$ | $+$                                                                                | $\bigcirc$ | $-$ | $\bigcirc$ | $+$ |
| $f$     |  |            |     |            |     |

## Extremum d'une fonction

### Théorème

Soit une fonction  $f$  définie et dérivable sur un intervalle ouvert  $I$ .

Si la dérivée  $f'$  de  $f$  s'annule et change de signe en un réel  $c$  de  $I$  alors  $f$  admet un extremum en  $x = c$ .

### Méthode : Rechercher un extremum

La fonction  $f$  définie sur  $R$  par  $f(x) = x^2 + 12x + 7$  admet-elle un extremum sur  $R$  ?

Pour tout  $x$  réel, on a :  $f'(x) = 2x + 12$

Et :  $f'(x) = 0$  pour  $x = -6$

On dresse alors le tableau de variations :

|         |                                                                                    |            |           |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$                                                                          | $-6$       | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$                                                                                | $\bigcirc$ | $+$       |
| $f$     |  |            |           |

En effet :  $f(-6) = -29$

La fonction  $f$  admet donc un minimum égal à  $-29$  en  $-6$

### Méthode : Étudier la position relative de deux courbes

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $[1; +\infty[$  par :  $f(x) = x^3$  et  $g(x) = -4x + 5$ .

Étudier la position relative des courbes représentatives  $C_f$  et  $C_g$ .

On va étudier le signe de la différence  $f(x) - g(x)$  :

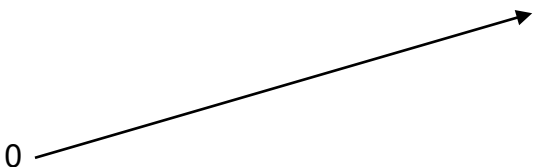
On pose :  $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 4x - 5$

Pour tout  $x$  de  $[1; +\infty[$ , on a :  $h'(x) = 3x^2 + 4$

Donc  $h'(x) > 0$ .

On en déduit que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[1; +\infty[$ .

On construit le tableau de variations :

|         |                                                                                     |           |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| $x$     | $1$                                                                                 | $+\infty$ |
| $h'(x)$ | $+$                                                                                 |           |
| $h$     |  |           |

$$h(1) = 1^3 + 4 \times 1 - 5 = 0$$

D'après le tableau de variations, on a  $h(x) \geq 0$

Soit:  $f(x) - g(x) \geq 0$  et donc  $f(x) \geq g(x)$ .

On en déduit que la courbe  $C_f$  est au-dessus de la courbe  $C_g$  sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ .