

Nombres premiers

Nombres entiers naturels

Un nombre entier naturel est un nombre entier qui est positif.

L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$.

Exemples

$6 \in \mathbb{N}$ $-3 \notin \mathbb{N}$

Nombres entiers relatifs

Un nombre entier relatif est un nombre entier qui est positif ou négatif.

L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$.

Exemples

$-3 \in \mathbb{Z}$ $4 \in \mathbb{Z}$ $0,66 \notin \mathbb{Z}$

Multiples et diviseurs

Soit a et b deux entiers. On dit que a est un multiple de b s'il existe un entier k tel que $a = k b$. On dit alors que b est un diviseur de a .

Exemples

12 est un multiple de 3, car $12 = k \times 3$ avec $k = 4$

10 est un diviseur de 60, car $60 = k \times 10$ avec $k = 6$

Par contre, 19 n'est pas un multiple de 3 car il n'existe pas d'entier k tel que $19 = k \times 3$.

Propriété

La somme de deux multiples d'un entier a est un multiple de a .

Nombres pairs, impairs

Un nombre pair est un multiple de 2.

Un nombre impair est un nombre qui n'est pas pair.

Exemples

2, 18, 786 et 0 sont des nombres pairs

17, 81 et 1 sont des nombres impairs.

Propriétés

Un nombre pair s'écrit sous la forme $2k$, avec k entier.

Un nombre impair s'écrit sous la forme $2k+1$, avec k entier.

Propriété

Le carré d'un nombre impair est impair.

Nombres premiers

Un nombre est premier s'il possède exactement deux diviseurs qui sont 1 et lui-même.

Exemples

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

Définition

On dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur seul diviseur commun est 1.

Propriété

Tout nombre non premier peut se décomposer en produits de facteurs premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Exemple

$$600 = 2 \times 3 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$$

Définition

On dit qu'une fraction est irréductible, lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Méthode: Rendre une fraction irréductible

Rendre irréductible la fraction $\frac{120}{126}$

Pour rendre une fraction irréductible, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

120		2	126		2
60		2	63		3
30		2	21		3
15		3	7		7
5		5	1		
1					

On a ainsi les décompositions de 120 et 126

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \text{ et } 126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$$

$$\text{On a : } \frac{120}{126} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{20}{21}$$

20 et 21 sont premiers entre eux et donc

$$\frac{20}{21} \text{ est la fraction irréductible égale à } \frac{120}{126}$$

Puissances

Exemples

3 à la puissance 5	4 à la puissance 3	0 à la puissance 7	1 à la puissance 6	8 à la puissance 1	-2 à la puissance 4
3^5	4^3	0^7	1^6	8^1	$(-2)^4$
$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$	$4 \times 4 \times 4$	$0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0$	$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1$	8	$(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$
243	64	0	1	8	16

Définition

$a^5 = a \times a \times a \times a \times a$ et de façon générale $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$ (avec n facteurs a)

Cas particuliers

$a^1 = a$ pour tout nombre a

$a^0 = 1$ pour tout nombre a (non nul)

$0^p = 0$ pour tout nombre p (non nul)

$1^p = 1$ pour tout nombre p

Exemples

Ne pas confondre: $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$
 et: $-2^4 = -2 \times 2 \times 2 \times 2 = -16$

Opérations sur les puissances

Avec $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \quad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \quad (a^n)^p = a^{n \times p} \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Méthode: Effectuer des calculs sur les puissances

Exprimer sous la forme d'une seule puissance

$$A = 8^5 \times 8^7 \quad B = \frac{7^4}{7^6}$$

$$\begin{aligned} A &= 8^5 \times 8^7 \\ &= 8^{5+7} \\ &= 8^{12} \end{aligned} \quad \begin{aligned} B &= \frac{7^4}{7^6} \\ &= 7^{4-6} \\ &= 7^{-2} \end{aligned}$$

Racines carrées

Exemples

$$3^2 = 9 \text{ donc } \sqrt{9} = 3$$

$$1,4^2 = 1,96 \text{ donc } \sqrt{1,96} = 1,4$$

Définition

La racine carrée de a est le nombre (toujours positif) dont le carré est a .

Remarque

Est-ce que $\sqrt{-7}$ existe ?

La racine carrée de -7 est le nombre dont le carré est -7

Un nombre au carré est toujours positif (règle des signes), donc la racine carrée d'un nombre négatif est impossible.

$\sqrt{-7}$ n'existe pas

Exemples

$$\sqrt{0} = 0$$

$$\sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{2} \approx 1,414$$

$$\sqrt{3} \approx 1,732$$

Racines de carrés parfaits

$$\sqrt{4} = 2 \quad \sqrt{36} = 6 \quad \sqrt{100} = 10 \quad \sqrt{196} = 14$$

$$\sqrt{9} = 3 \quad \sqrt{49} = 7 \quad \sqrt{121} = 11 \quad \sqrt{225} = 15$$

$$\sqrt{16} = 4 \quad \sqrt{64} = 8 \quad \sqrt{144} = 12$$

$$\sqrt{25} = 5 \quad \sqrt{81} = 9 \quad \sqrt{169} = 13$$

Exemples

$$\sqrt{7^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = +3 = 3$$

$$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$$

Propriété

Pour un nombre a positif, on a $\sqrt{a^2} = a$

Pour un nombre a négatif, on a $\sqrt{a^2} = -a$

Opérations sur les racines carrées

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (\sqrt{a})^2 = a$$

Remarque

Par contre,

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b} \quad \text{et} \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$$

Méthode: Effectuer des calculs sur les racines carrées

Ecrire le plus simplement possible

$$A = \sqrt{128} \times \sqrt{2}$$

$$B = \sqrt{3} \times \sqrt{27}$$

$$A = \sqrt{128} \times \sqrt{2} = \sqrt{128 \times 2} = \sqrt{256} = 16$$

$$B = \sqrt{3} \times \sqrt{27} = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$$

Méthode: Extraire un carré parfait

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et b étant le plus petit possible

$$A = \sqrt{108}$$

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{108} \\ &= \sqrt{9 \times 12} \\ &= \sqrt{9} \times \sqrt{12} \\ &= 3 \times \sqrt{12} \\ &= 3 \times \sqrt{4 \times 3} \\ &= 3 \times \sqrt{4} \times \sqrt{3} \\ &= 3 \times 2 \times \sqrt{3} \\ &= 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

Méthode: Simplifier une écriture contenant des racines carrées

1) Écrire le plus simplement possible

$$A = 4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$$

On regroupe les membres d'une même famille de racines carrées pour réduire l'expression.

$$\begin{aligned} A &= 4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 6\sqrt{5} \\ &= 8\sqrt{5} \end{aligned}$$

2) Écrire l'expression suivante sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont des entiers et b le plus petit possible

$$D = \sqrt{12} + 6\sqrt{3} - \sqrt{27}$$

On fait apparaître des racines carrées d'une même famille. Pour cela, il faut extraire des carrés parfaits.

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{12} + 6\sqrt{3} - \sqrt{27} \\ &= \sqrt{4 \times 3} + 6\sqrt{3} - \sqrt{9 \times 3} \\ &= 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 3\sqrt{3} \\ &= 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

Méthode: Effectuer des développements avec des racines carrées

Écrire les expressions suivantes sous la forme $a + b\sqrt{c}$, où a , b et c sont des entiers relatifs :

$$A = (\sqrt{5} - 4)^2$$

$$B = (3 + \sqrt{7})^2$$

$$A = (\sqrt{5} - 4)^2$$

$$= (\sqrt{5})^2 - 2 \times \sqrt{5} \times 4 + 4^2$$

$$= 5 - 8\sqrt{5} + 16$$

$$= 21 - 8\sqrt{5}$$

$$\mathbf{B} = (3 + \sqrt{7})^2$$

$$= (3)^2 + 2 \times 3 \times \sqrt{7} + (\sqrt{7})^2$$

$$= 9 + 6\sqrt{7} + 7$$

$$= 16 + 6\sqrt{7}$$

Nombres réels

Nombres décimaux

Un nombre décimal est un nombre de la forme $\frac{a}{10^p}$, avec a entier et p entier naturel.

Un nombre décimal peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.

L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemples

$$0,78 \in \mathbb{D} \quad -7 \in \mathbb{D} \quad \frac{1}{3} \notin \mathbb{D} \text{ mais } \frac{3}{4} \in \mathbb{D}$$

Nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec a un entier et b un entier non nul.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Exemples

$$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \quad 6 \in \mathbb{Q} \quad -9,2 \in \mathbb{Q} \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Notion de nombres réels

Un nombre est réel s'il est l'abscisse d'un point d'une droite graduée appelée la droite numérique. L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Exemples

$$6, 0, -7, 0,98, \frac{1}{3}, \sqrt{2} \text{ ou } \pi \text{ appartiennent à } \mathbb{R}.$$

Classification des nombres

Tous les nombres de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ appartiennent à l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.

On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$. On note: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

On a également les inclusions suivantes :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Les nombres irrationnels

Un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit irrationnel.

Exemples

$\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ou encore π sont des nombres irrationnels. Ils ne peuvent pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b deux entiers relatifs, b non nul.

Méthode: Donner un encadrement d'un nombre réel

A l'aide de la calculatrice donner un encadrement à 10^{-3} de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$.

On a alors les encadrements à 10^{-3} : $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ et $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$.

