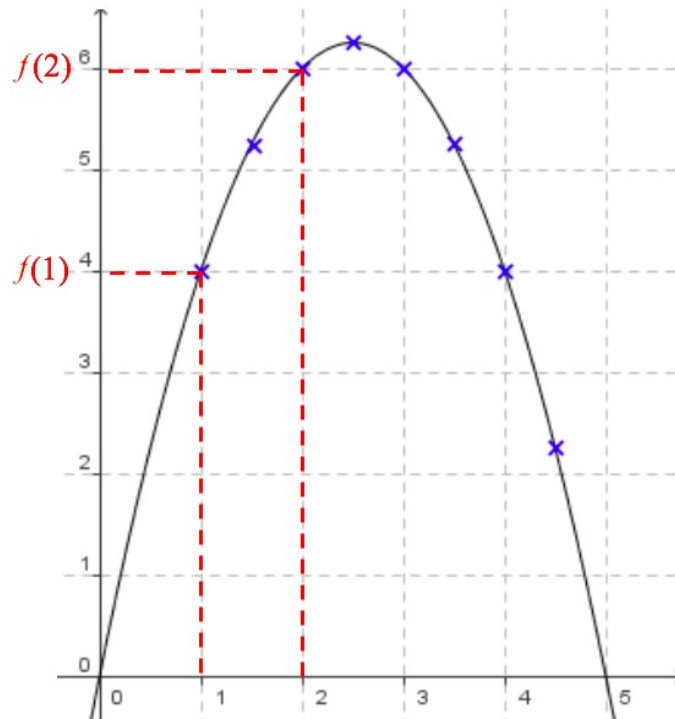


Variations d'une fonction

Exemple

On a représenté ci-dessous dans un repère la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.



Pour des valeurs croissantes choisies pour x dans l'intervalle $[0 ; 2,5]$, les valeurs de f sont également croissantes.

Par exemple: $1 < 2$ et $f(1) < f(2)$.

Pour des valeurs croissantes choisies pour x dans l'intervalle $[2,5 ; 5]$, les valeurs de f sont décroissantes.

Par exemple: $3 < 4$ et $f(3) > f(4)$.

On dit que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 2,5]$ et décroissante sur l'intervalle $[2,5 ; 5]$.

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Dire que f est croissante sur I signifie que pour tous réels a et b de I :

si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$

Dire que f est décroissante sur I signifie que pour tous réels a et b de I :

si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$

Dire que f est constante sur I signifie que pour tous réels a et b de I : $f(a) = f(b)$

Dire que f est monotone sur I signifie que f est soit croissante sur I , soit décroissante sur I .

Tableau de variations

Un tableau de variations résume les variations d'une fonction en faisant apparaître les intervalles où elle est monotone.

Exemple

On reprend la fonction f définie dans l'exemple précédent

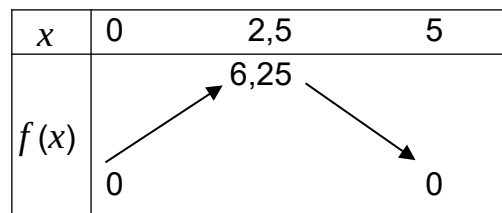
La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 2,5]$ et décroissante sur l'intervalle $[2,5 ; 5]$.

$$f(0) = 0$$

$$f(2,5) = 6,25$$

$$f(5) = 0$$

x	0	2,5	5
$f(x)$	0	6,25	0



Variations des fonctions de référence

Fonctions affines et fonctions linéaires

Une fonction affine f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels. Lorsque $b = 0$, la fonction f définie par $f(x) = ax$ est une fonction linéaire.

Exemples

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 4$ est une fonction affine.

La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{-2}{3}x$ est une fonction linéaire.

Propriété

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

Si $a > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

Dans le cas d'une fonction linéaire, il s'agit d'une droite passant par l'origine du repère.

Dans le cas d'une fonction constante, il s'agit d'une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Exemple

Pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$

a est coefficient directeur et b est l'ordonnée à l'origine de la droite représentative.

Pour (d) : Le coefficient directeur est 2
L'ordonnée à l'origine est -3

La fonction f représentée par la droite (d) est définie par $f(x) = 2x - 3$

Pour (d') : Le coefficient directeur est -4
L'ordonnée à l'origine est -1

La fonction g représentée par la droite (d') est définie par $g(x) = -4x - 1$

Propriété

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points distincts de la droite (d) représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ alors

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Méthode : Déterminer l'expression d'une fonction affine

Déterminer par calcul une expression de la fonction f telle que $f(-2) = 4$ et $f(3) = 1$.

La représentation graphique correspondant à la fonction affine f passe donc par les points $A(-2; 4)$ et $B(3; 1)$.

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$a = \frac{1-4}{3-(-2)} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{Donc : } f(x) = -\frac{3}{5}x + b.$$

Comme A est un point de la droite, on a: $f(-2) = 4$, donc:

$$4 = -\frac{3}{5}(-2) + b \text{ donc } b = \frac{14}{5}.$$

$$\text{D'où: } f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{14}{5}.$$

Variations de la fonction carré

La fonction carré f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Variations de la fonction inverse

La fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Variations de la fonction racine carrée

La fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Variations de la fonction cube

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Extremum d'une fonction

Définitions

Soit f une fonction de l'intervalle I . a et b deux nombres réels de I .

Dire que f admet un maximum M en a de I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I , $f(x) \leq M = f(a)$

Dire que f admet un minimum m en b de I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I , $f(x) \geq m = f(b)$

Exemple

Soit la fonction f définie par: $f(x) = (x - 3)^2 + 4$

La fonction f admet un minimum en 3 qui vaut 4