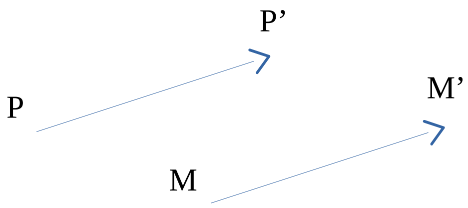
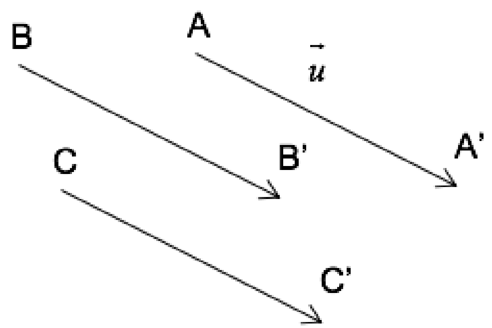
Translation

Définition
Soit P et P' deux points distincts du plan.
On appelle **translation** qui envoie P sur P' la transformation dont l'image M' d'un point M est obtenue en faisant glisser le point M:
selon la direction de la droite (PP'),
dans le sens de P vers P',
d'une longueur égale à PP'.



Définition
Soit *t* la translation qui envoie A sur A', B sur B' et C sur C'.
Les couples de points (A; A'), (B; B') et (C; C') définissent un **vecteur** caractérisé par:
une direction: celle de la droite (AA'),
un sens: de A vers A',
une longueur: la longueur AA'.

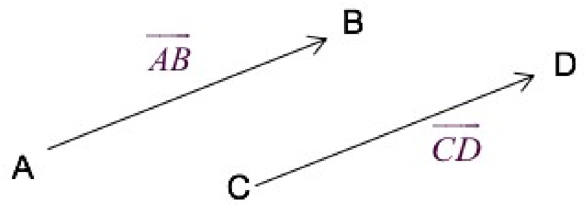


On note $\vec{u}$ ce vecteur et on écrit: $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$.
On dit que $\overrightarrow{AA'}$ est un **représentant** de $\vec{u}$.
$\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont également des représentants de $\vec{u}$.
La longueur d'un vecteur est aussi appelée la **norme** du vecteur.

Égalité de vecteurs
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** lorsqu'ils ont même direction, même sens et même longueur.
On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Exemple

on peut poser : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.



Propriété du parallélogramme

Soit A, B, C et D quatre points deux à deux distincts.
Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux revient à dire que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati.

Propriété du milieu

Dire que B est le milieu du segment [AC] revient à dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont égaux.

Vecteur nul

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est **nul** lorsque les points A et B sont confondus.

On note: $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Remarque

Pour tout point M, on a: $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

Vecteurs opposés

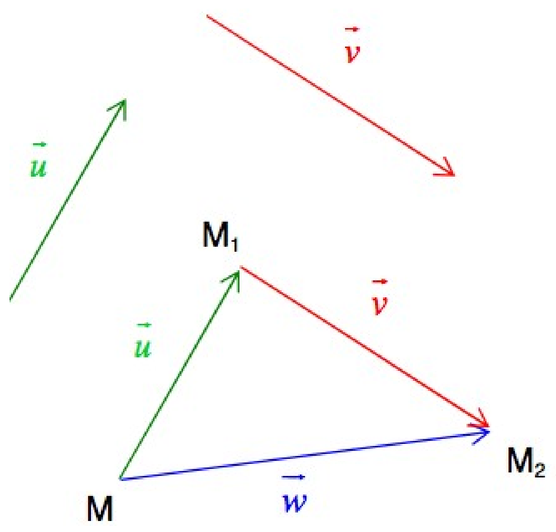
Deux vecteurs sont **opposés** lorsqu'ils ont la même direction, la même longueur et qu'ils sont de sens contraire.

Remarque

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés.
On note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Somme de vecteurs

Exemple



Soit t_1 la translation de vecteur $\vec{u}$ et t_2 est la translation de vecteur $\vec{v}$.
Appliquer la translation t_1 puis la translation t_2, revient à appliquer la translation t de vecteur $\vec{w}$

Propriété

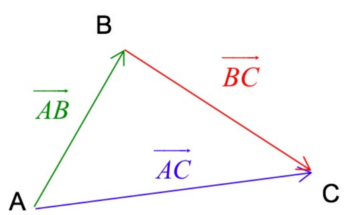
La composée (ou l'enchaînement) de deux translations est une translation.

Définition

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.
On appelle **somme** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} + \vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ associé à la translation composée des translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

La relation de Chasles

Pour tous points A, B et C du plan, on a: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



Exercice

Simplifier les écritures

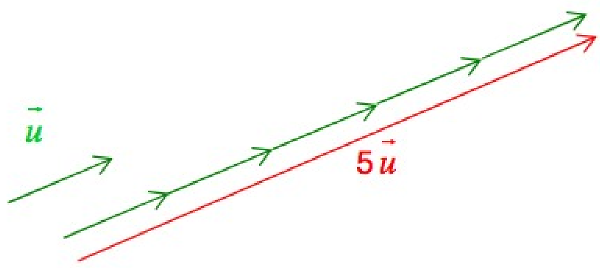
a) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM}$ b) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK}$

a) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP}$
b) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK} = \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{NK} = \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{NK} = \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{NP}$

Propriété caractéristique du parallélogramme
Dire que ABCD est un parallélogramme revient à dire que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Différence de deux vecteurs
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.
On appelle **différence** du vecteur $\vec{u}$ avec le vecteur $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$, tel que: $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

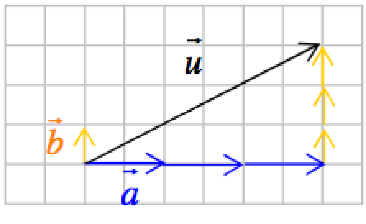
Produit d'un vecteur par un réel



Exemple
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.
Appliquer 5 fois la translation de vecteur $\vec{u}$ revient à appliquer la translation de vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 5\vec{u}$

Définition
$\vec{u}$ est un vecteur quelconque différent de $\vec{0}$ et *k* un nombre réel non nul.
On appelle **produit** du vecteur $\vec{u}$ par le réel *k*, le vecteur noté $k\,\vec{u}$
de même direction que $\vec{u}$,
de même sens que $\vec{u}$ si k > 0 et de sens contraire si k < 0,
de norme égale à : k fois la norme de $\vec{u}$ si k > 0,
–k fois norme de $\vec{u}$ si k < 0.

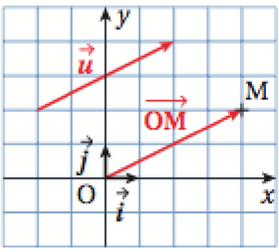
Exercice
Par lecture graphique, exprimer le vecteur $\vec{u}$ en fonction des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.



On construit *«un chemin»* de vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ mis bout à bout reliant l'origine et l'extrémité du vecteur $\vec{u}$.
On compte ainsi le nombre de vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ formant *«le chemin»*.
$\vec{u} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$.

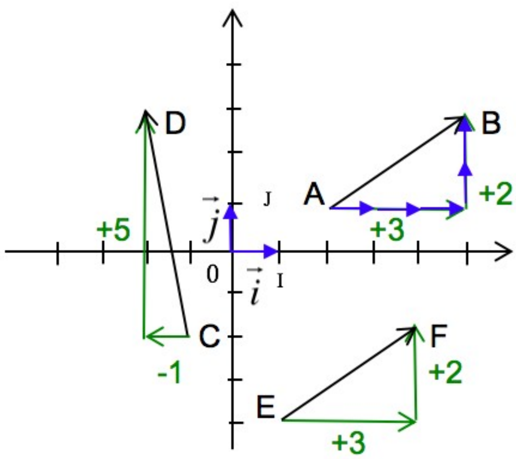
Coordonnées d'un vecteur

Définition
Trois points distincts deux à deux O, I et J du plan forment un repère, que l'on peut noter (O, I, J).
L'origine O et les unités OI et OJ permettent de graduer les axes (OI) et (OJ).
Si on pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, alors ce repère se note également (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).
On appelle **repère du plan** tout triplet (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) où O est un point et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires.
Un repère est dit **orthogonal** si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires.
Un repère est dit **orthonormé** s'il est orthogonal et si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de norme 1.



Définition
Soit M un point quelconque d'un repère (O, $\vec{i}$,$\vec{j}$) et un vecteur $\vec{u}$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
Les **coordonnées du vecteur** $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M.
On note: $\vec{u}$ (x, y) ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exemple
Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$et $\overrightarrow{EF}$ par lecture graphique:



Pour aller de A vers B, on effectue une translation de 3 carreaux vers la droite (+3) et une translation de 2 carreaux vers le haut (+2). On trace ainsi un *«chemin»* de vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ mis bout à bout reliant l'origine et l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Ainsi $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

De même, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Propriété

Soit A et B deux points de coordonnées $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ dans un repère (O, $\vec{i},\vec{j}$)

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Exercice

Retrouver les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$et $\overrightarrow{EF}$ par calcul avec

A$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, C$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, D$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, E$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et F$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2-(-1) \\ 3-(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 4-1 \\ -2-(-4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Propriétés

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère (O, $\vec{i},\vec{j}$) et un réel *k*.

$\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$

Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$

Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Exercice

Calculer les coordonnées des vecteurs $3\overrightarrow{AB}$, $4\overrightarrow{CD}$ et $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD}$.

On a: $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$3\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3\times 3 \\ 3\times 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$, $4\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 4\times(-1) \\ 4\times 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 20 \end{pmatrix}$

$3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 9-(-4) \\ 6-20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ -14 \end{pmatrix}$

Vecteurs colinéaires

Définition
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** signifie qu'ils ont même direction c'est à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$.

Exercice
On donne $\vec{u}$ un vecteur du plan. Soit un vecteur $\vec{v}$ tel que $-4\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{0}$.
Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$-4\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{0}$
$-4\vec{u} = -3\vec{v}$
$\frac{4}{3}\vec{u} = \vec{v}$

Il existe un nombre réel $k = \frac{4}{3}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

Propriétés
1) A, B, C et D étant quatre points deux à deux distincts du plan.
Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
2) Dire que les points distincts A, B et C sont alignés revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Critère de colinéarité
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère (O, $\vec{i},\vec{j}$)

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles soit: $xy' - yx' = 0$.

Exercice
Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -12 \\ 21 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 15 \\ -7 \end{pmatrix}$

a) 4 x 21 – (–7) x (–12) = 84 – 84 = 0.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.
On peut également observer directement que $\vec{v} = -3\vec{u}$.
b) 5 x (–7) – (–2) x (15) = –35 + 30 = –5 ≠ 0.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

Déterminant de deux vecteurs
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère (O, $\vec{i},\vec{j}$)

Le nombre $xy' - yx'$ est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On note: $det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x y' - y x'$.

Propriété

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que $det(\vec{u};\vec{v}) = 0$.

Exercice

On considère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan.

Soit A$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, C$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, D$\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ et E$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2) Démontrer que les points E, B et D sont alignés.

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 6-(-2) \\ -1-(-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Comme les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont proportionnelles, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Les droites (AB) et (CD) sont donc parallèles.

2) $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix} 3-5 \\ 2-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix} 6-5 \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$det(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{ED}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2\times(-1) - 2\times 1 = 0$

Les coordonnées de $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{ED}$ vérifient le critère de colinéarité des vecteurs.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires.

Les points E, B et D sont donc alignés.