Continuité

Courbe d'une fonction continuité
La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

Définition
Soit une fonction *f* définie sur un intervalle I contenant un réel *a*.
f est continue en *a* si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ = f(a)

f est continue sur I si *f* est continue en tout point de I.

Exemples :
Les fonctions $x \to |x|$, $x \to x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions $x \to \sin x$ et $x \to \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \to \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$
La fonction $x \to \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$

Remarque :
Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Méthode : Etudier la continuité d'une fonction

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = -x+2 \text{ pour } x<5 \\ f(x) = x-8 \text{ pour } 5 \leqslant x < 7 \\ f(x) = -3x+4 \text{ pour } x \geqslant 7 \end{cases}$

La fonction *f* est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Les fonctions $x \to -x+2$, $x \to x-8$ et $x \to -3x+4$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.
Ainsi la fonction *f* est continue sur $]-\infty;5[$, sur $[5;7[$ et sur $[7;+\infty[$.
Etudions alors la continuité de *f* en 5 et en 7 :

$\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} (-x+2) = -5+2 = -3$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} (x-8) = 5-8 = -3$

$\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} f(x)$ = $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} f(x)$ = f(5) donc la fonction *f* est continue en 5.

$\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ x<7}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ x<7}} (x-8) = 7-8 = -1$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ x>7}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 7 \\ x>7}} (-3x+4) = -21+4 = -17$

La limite de *f* en 7 n'existe pas. On parle de limite à gauche de 7 et de limite à droite de 7.
La fonction *f* n'est donc pas continue en 7.
La fonction *f* est continue sur $]-\infty;7[$ et sur $[7;+\infty[$.

Continuité et dérivation

Théorème

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

Remarque

La réciproque de ce théorème est fausse. Une fonction peut être continue en a mais pas dérivable en a.

Prenons par exemple la fonction valeur absolue en 0.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

La fonction valeur absolue est continue en 0.

Une fonction continue mais pas dérivable en a est caractérisée par une courbe qui admet un point anguleux

Continuité et suite

Théorème du point fixe

Soit une suite (u_n) définie par un premier terme et $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers ℓ. Si la fonction associée f est continue en ℓ, alors la limite de la suite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$

Exercice

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et $u_{n+1} = 2u_n (1 - u_n)$. On admet que la suite (u_n) est croissante et convergente vers $\boldsymbol{\ell}$. Déterminer $\boldsymbol{\ell}$.

La fonction f associée à la suite (u_n) est $f(x) = 2x (1 - x)$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car f est un polynôme.
D'après le théorème du point fixe, ℓ vérifie l'équation $2x (1 - x) = x \Leftrightarrow 2x - 2x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x (1 - 2x) = 0$.
Cette équation admet deux solutions $x = 0$ ou $x = 0,5$. Comme la suite est croissante et $u_0 = 0,1$ alors $\ell \geqslant 0,1$. La solution qui convient est alors $\ell = 0,5$

Continuité et équation

Théorème des valeurs intermédiaires :
On considère la fonction *f* définie et continue sur un intervalle [*a* ; *b*].
Pour tout réel *k* compris entre f(a) et f(b), il existe au moins un réel *c* compris entre *a* et *b* tel que f(c) = k
Conséquence :
Dans ces conditions, l'équation f(x) = k admet au moins une solution dans l'intervalle [*a*; *b*].

Cas particuliers :
Dans le cas où la fonction *f* est strictement monotone sur l'intervalle [*a* ; *b*] alors le réel *c* est unique.
Dans le cas où f(a) et f(b) sont de signes contraires alors il existe au moins un réel *c* compris entre *a* et *b* tel que f(c) = 0

Méthode : Résolution approchée d'une équation
On considère la fonction *f* définie sur ℝ par $f(x)=x^3-6x^2+1$
Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet exactement une solution sur l'intervalle $[4;+\infty[$

Existence : f(4) = 4^3-6x4²+1 = 64-96+1 = -31
et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
La fonction *f* est continue sur l'intervalle $[4;+\infty[$ et elle change de signe.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel *c* tel que f(c) = 0
Unicité : $f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$
Donc, pour tout *x* de $]4;+\infty[$, f '(x) > 0
La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $]4;+\infty[$
On en déduit qu'il existe un unique réel *c* tel que f(c) = 0