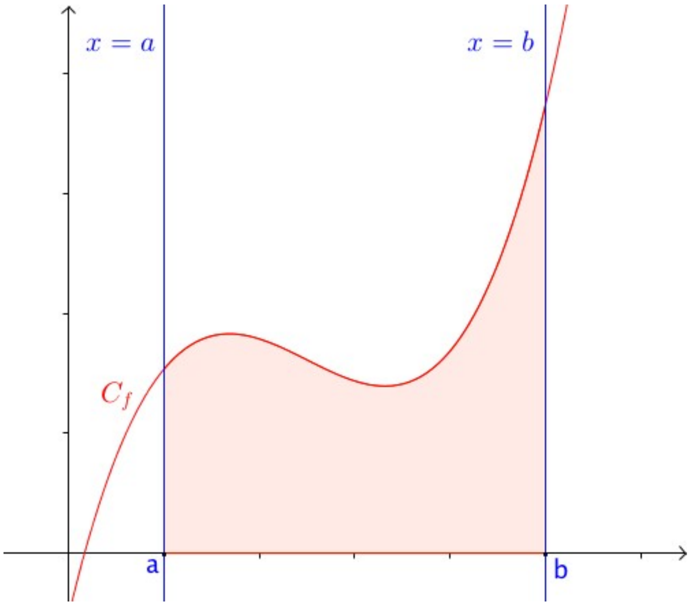
Intégrale d'une fonction continue positive

Unité d'aire

Dans le repère (O, I, J), le rectangle OIKJ a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle unité qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.
Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).

Définition

Soit *f* une fonction continue et positive sur un intervalle [*a* ; *b*].
On appelle intégrale de *f* sur [*a* ; *b*] l'aire, exprimée en u.a., de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction *f*, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et *x* = b



Notation

L'intégrale de la fonction *f* sur [*a* ; *b*] se note : $\int_a^b f(x)\,dx$

Et on lit "intégrale de a à b de f(*x*)dx".

Exemple

L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction f(x) = x^2 + 3, l'axe des abscisses et les droites d'équations *x* = -2 et *x* = 1 est l'intégrale de la fonction *f* sur l'intervalle [-2 ; 1] et se note $\int_a^b (x^2+3)\,dx$

Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive

Soit une fonction *f* continue, positive et monotone sur un intervalle [*a* ; *b*].

On partage l'intervalle [*a* ; *b*] en *n* sous-intervalles de même amplitude l = $\frac{b-a}{n}$

Sur un sous-intervalle [x ; x + l], l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles:
l'un de dimension l et f(x) qui a pour aire l x f(x);
l'autre de dimension l et f(x + l) qui a pour aire l x f(x + l)
Sur l'intervalle [a ; b], l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles inférieurs et la somme des n rectangles supérieurs.

Intégrale et primitive

Fonction définie par une intégrale

Soit *f* une fonction continue et positive sur un intervalle [*a* ; *b*].

La fonction *F* définie sur [*a* ; *b*] par F(x) = $\int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur [*a* ; *b*] et sa dérivée est la fonction *f*.

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ admet des primitives sur cet intervalle.

Propriété

Soit *f* une fonction continue et positive sur un intervalle [*a* ; *b*].

Si *F* est une primitive de *f* alors $\int_a^x f(t)\,dt$ = F(b) - F(a)

Définition

Soit *f* une fonction continue sur un intervalle I, *a* et *b* deux réels de I et *F* une primitive de *f* sur [*a* ; *b*].

On appelle intégrale de *f* sur [*a* ; *b*] la différence F(b) - F(a) notée $\int_a^b f(x)\,dx$

Remarque

La définition est étendue à des fonctions de signe quelconque.
Ainsi pour une fonction *f* négative sur [*a* ; *b*], on peut écrire :

$\int_a^b f(x)\,dx$ = F(b) - F(a)

$\int_a^b f(x)\,dx$ = -(G(b) - G(a)) où *G* est une primitive de la fonction -*f*

$\int_a^b f(x)\,dx$ = - $\int_a^b (-f(x))\,dx$

Dans ce cas, l'intégrale de la fonction *f* sur [*a* ; *b*] est égale à l'opposé de l'aire comprise entre l'axe des abscisse et la courbe représentative de *f* sur [*a* ; *b*].

Notation

On écrit : $\int_a^b f(x)\,dx$ = $[F(x)]_a^b$ = F(b) - F(a)

Exercice

Calculer : A = $\int_2^5 (3x^2+4x-5)\,dx$

A = $\int_2^5 (3x^2+4x-5)\,dx$

= $[x^3+2x^2-5x]_2^5$

= $5^3 + 2 \times 5^2 - 5 \times 5 - (2^3 + 2 \times 2^2 - 5 \times 2)$
= $125 + 50 - 25 - (8 + 8 - 10)$
= 144

Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur [*a*; *b*] qui admettent des dérivées u' et v' continues. Alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Exercice

Calculer A = $\int_1^e x\ln(x)dx$

A = $\int_1^e x\ln(x)dx$

On pose u(x) = ln(x) v'(x) = x

u'(x) = $\frac{1}{x}$ v(x) = $\frac{x^2}{2}$

A = $\left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{1}{4}$ (e^2 + 1)

Propriétés de l'intégrale

Propriété
Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.

a) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

b) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Relation de Chasles
Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a, b et c trois réels de I.

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Linéarité
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.

a) Pour k réel, $\int_a^b kf(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$

b) $\int_a^b (g(x)+f(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Inégalités
Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I avec $a \leqslant b$

a) Si, pour tout x de [a; b], $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$

b) Si, pour tout x de [a; b], $f(x) \geqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$

Exercice
a) Démontrer que pour tout x de [0 ; 1], on a $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$

b) En déduire que $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e - 1$

a) Sur [0 ; 1], $x^2 \leq x$

Comme la fonction exponentielle est croissante et positive sur $\mathbb{R}$, on a $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$

b) On déduit de la question précédente que $\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq \int_0^1 e^x\,dx$

D'où $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e - 1$

Valeur moyenne d'une fonction

Définition
Soit *f* une fonction continue sur un intervalle [*a* ; *b*] avec $a \neq b$
On appelle valeur moyenne de *f* sur [*a* ; *b*] le nombre réel m = $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$

Exemple
Calculons la valeur moyenne de la fonction *f* définie par f(*x*) = $3x^2 - 4x + 5$ sur l'intervalle [0 ; 10].
m = $\frac{1}{10-0} \int_0^{10} (3x^2 - 4x + 5)\,dx$
m = $\frac{1}{10} \left[x^3 - 2x^2 + 5x\right]_0^{10}$
m = $\frac{1}{10}$ (1000 – 200 + 50)
m = 85