Limite d'une fonction à l'infini

Exemple de limite finie à l'infini

La fonction définie par $f(x)=3+\frac{1}{x}$ a pour limite 3 lorsque *x* tend vers $+\infty$

En effet, les valeurs de la fonction se resserrent autour de 3 dès que *x* est suffisamment grand.

Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 3, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que *x* est suffisamment grand.

Définitions

On dit que la fonction *f* admet pour limite *L* en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant *L* contient toutes les valeurs de *f* (*x*) dès que *x* est suffisamment grand et on note :

$\lim_{x \to +\infty} f(x)=L$

La droite d'équation y = L est asymptote à la courbe représentative de la fonction *f* en $+\infty$ si $\lim_{x \to +\infty} f(x)=L$

La droite d'équation y = L est asymptote à la courbe représentative de la fonction *f* en $-\infty$ si $\lim_{x \to -\infty} f(x)=L$

Remarque

Lorsque *x* tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, la courbe de la fonction "se rapproche" de son asymptote.

Exemple de limite infinie à l'infini

La fonction définie par $f(x)=x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque *x* tend vers $+\infty$

En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que *x* est suffisamment grand.

Si on prend un réel *a* quelconque, l'intervalle $]a;+\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que *x* est suffisamment grand.

Définition

On dit que la fonction *f* admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]a;+\infty[$, *a* réel, contient toutes les valeurs de *f* (*x*) dès que *x* est suffisamment grand et on note :

$\lim_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$

On dit que la fonction *f* admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty;b[$, *b* réel, contient toutes les valeurs de *f* (*x*) dès que *x* est suffisamment grand et on note :

$\lim_{x \to +\infty} f(x)=-\infty$

Remarque

Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.

Limite d'une fonction en un réel

Définitions

On dit que la fonction *f* admet pour limite $+\infty$ en *A* si tout intervalle $]a;+\infty[$, *a* réel, contient toutes les valeurs de *f* (*x*) dès que *x* est suffisamment proche de *A* et on note : $\lim_{x \to A} f(x) = +\infty$

On dit que la fonction *f* admet pour limite $-\infty$ en *A* si tout intervalle $]-\infty;b[$, *b* réel, contient toutes les valeurs de *f* (*x*) dès que *x* est suffisamment proche de *A* et on note : $\lim_{x \to A} f(x) = -\infty$

La droite d'équation x = A est asymptote à la courbe représentative de la fonction *f* si $\lim_{x \to A} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \to A} f(x) = -\infty$

Remarque :

Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel *A* selon *x* > *A* ou *x* < *A*.

Considérons la fonction inverse définie sur ℝ* par $f(x) = \frac{1}{x}$

Si *x* < 0, alors f(x) tend vers $-\infty$ et on note : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$

Si *x* > 0, alors f(x) tend vers $+\infty$ et on note : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = -\infty$

On parle de limite à gauche de 0 et de limite à droite de 0.

Limites des fonctions usuelles

Propriétés :

$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

si n est pair, $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$

si n est impair, $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Exemples

$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

Opérations sur les limites

Limite d'une somme

α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x)+g(x))$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	L	$L>0$	$L<0$	$L>0$	$L<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x)g(x))$	$L\,L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Limite d'un quotient

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$	L	L	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$	$L'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec g(x) > 0	0 avec g(x) > 0	0 avec g(x) < 0	0 avec g(x) < 0	0	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exemple :

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x-7)(5+x^2)$?

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x-7)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (5+x^2)=+\infty$

D'après la règle sur la limite d'un produit : $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-7)(5+x^2)=-\infty$

Remarque :

Comme pour les suites, on rappelle que les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$\infty-\infty$ $0\times\infty$ $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions polynômes et rationnelles
Calculer : $\lim_{x\to+\infty}(-4x^3+5x^2-6x+1)$

Il s'agit d'une forme indéterminée
Levons l'indétermination :
$-4x^3+5x^2-6x+1=x^3(-4+\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3})$

Or $\lim_{x\to+\infty}(\frac{5}{x})=0$ $\lim_{x\to+\infty}(\frac{6}{x^2})=0$ $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{x^3})=0$

Donc par somme de limites $\lim_{x\to+\infty}(-4+\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3})=-4$

Comme $\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$, on a par produit de limites $\lim_{x\to+\infty}x^3(-4+\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3})=-\infty$

Donc $\lim_{x\to+\infty}(-4x^3+5x^2-6x+1)=-\infty$

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions avec des radicaux
Calculer : $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\infty-\infty$
Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :
$\sqrt{x+2}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

Or $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2})=+\infty$ $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x})=+\infty$

Donc par somme de limites $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})=+\infty$

Et donc par quotient de limites $\lim_{x\to+\infty}(\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}})=0$

D'où $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})=0$

Méthode : Déterminer une asymptote
Soit *f* la fonction définie sur $]-\infty;6[\cup]6;+\infty[$ par $f(x)=\frac{4x+5}{6-x}$

Démontrer que la droite d'équation y = -4 est asymptote horizontale à la courbe représentative de *f* en $+\infty$

Il faut donc démontrer que $\lim_{x\to+\infty}(\frac{4x+5}{6-x})=-4$: $\frac{4x+5}{6-x}=\frac{x}{x}\times\frac{4+\frac{5}{x}}{\frac{6}{x}-1}=\frac{4+\frac{5}{x}}{\frac{6}{x}-1}$

Or $\lim_{x\to+\infty}(\frac{5}{x})=0$ $\lim_{x\to+\infty}(\frac{6}{x})=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}(4+\frac{5}{x})=4$ et $\lim_{x\to+\infty}(\frac{6}{x}-1)=-1$

Et donc par quotient de limites $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4+\frac{5}{x}}{\frac{6}{x}-1}\right)=\frac{4}{-1}=-4$

Et donc $\lim_{x \to +\infty} f(x)=-4$

Limites et comparaisons

Théorème de comparaison

Soit *f* et *g* deux fonctions définies sur un intervalle $]a;+\infty[$, *a* réel, telles que pour tout , x > a, on a $f(x)\leq g(x)$

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

Si $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Si $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

Si $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Théorème des gendarmes :

Soit *f* , *g* et *h* trois fonctions définies sur un intervalle $]a;+\infty[$, *a* réel, telles que pour tout , x > a, on a $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ et $\lim_{x\to+\infty} h(x)=L$ alors $\lim_{x\to+\infty} g(x)=L$.

Remarque :

On obtient un théorème analogue en $-\infty$

Par abus de langage, on pourrait dire que les fonctions *f* et *h* (les gendarmes) se resserrent autour de la fonction *g* pour des valeurs de *x* suffisamment grandes pour la faire tendre vers la même limite.

Ce théorème est également appelé le théorème du sandwich.

Méthode : Utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement

Calculer : $\lim_{x\to+\infty}(x-\sin(x))$

$\lim_{x\to+\infty}\sin(x)$ n'existe pas. Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :

Pour tout *x*, $-1\leqslant-\sin(x)$ donc $x-1\leqslant x-\sin(x)$

Or $\lim_{x\to+\infty}(x-1)$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x\to+\infty}(x-\sin(x))=+\infty$

Limite d'une fonction composée

Exemple :

Soit la fonction *f* définie sur $\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{4-\frac{1}{x}}$

On souhaite calculer la limite de la fonction *f* en $+\infty$

On considère les fonctions *u* et *v* définie par : $u(x)=4-\frac{1}{x}$ et $v(x)=\sqrt{x}$

Alors : $f(x)=v(u(x))$. On dit alors que *f* est la composée de la fonction *u* par la fonction *v*.

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=4$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}v(u(x))=\lim\limits_{X\to4}v(X)=\lim\limits_{X\to4}(\sqrt{X})=\sqrt{4}=2$ D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\sqrt{4}=2$

Théorème :

A, B, C peuvent désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

Si $\lim\limits_{x\to A}u(x)=B$ et $\lim\limits_{x\to B}v(x)=C$ alors $\lim\limits_{x\to A}v(u(x))=C$

Méthode : Déterminer la limite d'une fonction composée

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x-5}{x+4}}$

On commence par calculer la limite de la fonction $\frac{3x-5}{x+4}$ lorsque *x* tend vers $+\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$

Levons l'indétermination :

$$\frac{3x-5}{x+4}=\frac{x}{x}\times\frac{3-\frac{5}{x}}{1+\frac{4}{x}}=\frac{3-\frac{5}{x}}{1+\frac{4}{x}}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-\frac{5}{x})=3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{4}{x})=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{5}{x}}{1+\frac{4}{x}}=3$

Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-5}{x+4}=3$ Par ailleurs, $\lim\limits_{X\to3}\sqrt{X}=\sqrt{3}$

Comme limite de fonctions composées, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{3x-5}{x+4}}=\sqrt{3}$