Logarithme népérien

Introduction

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur ℝ, à valeurs dans $]0;+\infty[$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel *a* de $]0;+\infty[$ l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans ℝ.

Définition

On appelle logarithme népérien d'un réel strictement positif *a*, l'unique solution de l'équation $e^x = a$. On la note ln a

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction :

$$\ln :]0;+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow \ln x$$

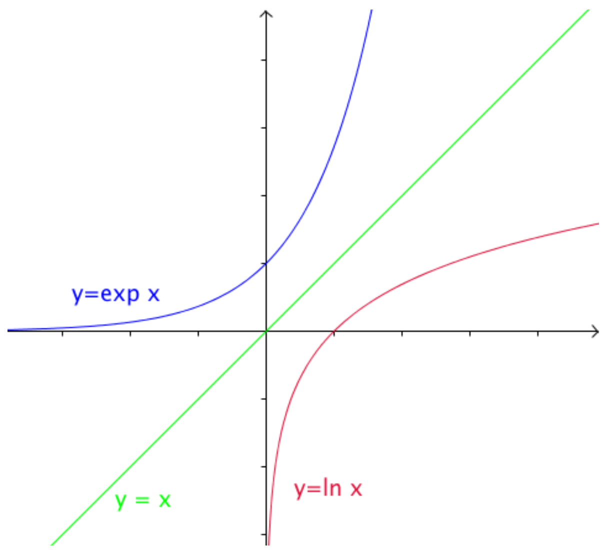
Remarques :

Les fonctions exp et ln sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

Les courbes représentatives des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x

Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée log et définie par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$



Conséquences :

a) $y = \ln x$ avec $x > 0$ est équivalent à $x = e^y$

b) $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\ln \frac{1}{e} = -1$

c) Pour tout *x*, $\ln e^x = x$ et pour tout *x* strictement positif, $e^{\ln x} = x$

Propriétés algébriques

Relation fonctionnelle
Pour tous réels *x* et *y* strictement positifs, on a : $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$

Corollaires
Pour tous réels *x* et *y* strictement positifs, on a :

a) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

b) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

c) $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$

d) $\ln x^n = n \ln x$ avec *n* entier relatif

Méthode : Simplifier une expression
A = $\ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$

A = $\ln(3-\sqrt{5}) + \ln(3+\sqrt{5})$
A = $\ln(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})$
A = $\ln 4$

Etude de la fonction

Continuité

La fonction logarithme népérien est continue sur $]0\,;+\infty[$

Dérivabilité

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $(\ln x)'=\frac{1}{x}$

Exemple :

Dériver la fonction suivante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$: f(x) = $\frac{(\ln x)^2}{x}$

f '(x) = $\frac{2\times\frac{1}{x}\times\ln x\times x-1\times(\ln x)^2}{x^2}$

f '(x) = $\frac{2\times\ln x-(\ln x)^2}{x^2}$ = $\frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$

Variations

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$

Corollaires

Pour tous réels *x* et *y* strictement positifs, on a :

a) ln x = ln y est équivalent à x = y

b) ln x < ln y est équivalent à x < y

Méthode : Résoudre une inéquation

Résoudre dans ℝ l'inéquation suivante : $\ln(3-x)-\ln(x+1)\leq 0$

Ensemble de définition:

3 – x > 0 x + 1 > 0

x < 3 x > -1

L'inéquation est définie sur]-1 ; 3[

On restreint donc la recherche des solutions à cet intervalle.

$\ln(3-x)-\ln(x+1)\leq 0$

$\ln(3-x)\leq\ln(x+1)$

$3-x\leq x+1$

$2\leq 2x$

$1\leq x$

L'ensemble solution est donc [1 ; 3[

Limites aux bornes

$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ et $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$

Tableau de variations

x	0		$+\infty$
$(\ln x)'$		$+$	
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Croissances comparées

Propriétés

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et pour tout entier non nul *n*, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ et pour tout entier non nul *n*, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$

Propriété

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Méthode : Déterminer une limite

$$\lim_{x \to +\infty} (x - \ln x)$$

Il s'agit d'une forme indéterminée de type ∞ - ∞

Levons l'indétermination :

x – ln x = x $\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$ = 1

Et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$ = $+\infty$ soit $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln x)$ = $+\infty$

Fonction ln u

Propriété

Soit *u* une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle **I**.

La fonction x → ln u(x) est dérivable sur **I**. Sa dérivée est la fonction x → $\frac{u'(x)}{u(x)}$

Exemple :

Soit la fonction *f* définie sur]0 ; 2[par f(x) = ln(2x - x^2) alors f '(x) = $\frac{2-2x}{2x-x^2}$

Propriété

Soit *u* une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle **I**.

Les fonctions x → u(x) et x → ln u(x) ont le même sens de variation.

Méthode : Etudier une fonction

On considère la fonction *f* définie sur]-2 ; 1[par f(x) = ln $\frac{x+2}{1-x}$

a) Calculer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.
b) Etudier la dérivabilité de la fonction *f*.
c) Déterminer le sens de variation de la fonction *f*.

a) $\lim_{x \to (-2)^+} \frac{x+2}{1-x} = 0$ donc $\lim_{x \to (-2)^+} f(x) = -\infty$ comme composée de limites.

$\lim_{x \to 1^-} \frac{x+2}{1-x} = +\infty$ donc $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$ comme composée de limites.

b) La fonction u : x → $\frac{x+2}{1-x}$ est strictement positive et dérivable sur]-2 ; 1[donc *f* est dérivable sur]-2 ; 1[

c) u '(x) = $\frac{1 \times (1-x) - (-1) \times (x+2)}{(1-x)^2}$ = $\frac{3}{(1-x)^2}$

Donc u '(x) > 0

La fonction *u* est donc strictement croissante sur]-2 ; 1[, d'où :

La fonction *f* est strictement croissante sur]-2 ; 1[

x	-2		1
f '(x)	‖	+	‖
f(x)	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$	‖